Aufgabenkatalog Algebra – Sommersemester 2019
Aufgaben zum Thema **Vektorräume**
Dr. Anton Malevich, Leonard Bechtel, Julian Maas

Aufgabe 1 (3)
Gegeben sei die Menge $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ mit der eintragsweisen Addition und Skalarmultiplikation. Für alle $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ und alle $c \in \mathbb{R}$ gelte:

- $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$
- $c \cdot (x, y, z) := (cx, cy, cz)$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^3$ bezüglich dieser Operationen ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

Aufgabe 2 (1)
Zeigen Sie, dass $V := \mathrm{Abb}([a, b], \mathbb{R}) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} : [a, b] \subset \mathbb{R}\}$ bezüglich folgender Operationen ein Vektorraum ist:

- $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$, für alle $x \in [a, b]$
- $(c \cdot f)(x) := c \cdot f(x)$ für alle $x \in [a, b]$

Aufgabe 3 (3)
Wir versuchen nun die Vektorraumstruktur von $\mathbb{R}^3$ den $\mathbb{K}^n$ zu verallgemeinern, wobei $\mathbb{K}$ ein beliebiger Körper ist und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie also, dass $\mathbb{K}^n = \{(x_1, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{K},\ 1 \leq i \leq n)\}$ bezüglich folgender Operationen ein Vektorraum ist:

- $(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) := (x_1 + y_1, ..., x_1 + y_n)$
- $c \cdot (x_1, ..., x_n) := (cx_1, ..., cx_n),\ c \in \mathbb{K}$

Aufgabe 4 (3)
Nun möchten wir $\mathrm{Abb}([a, b], \mathbb{R})$ auf beliebige Definitionsbereiche und einen beliebigen Körper $\mathbb{K}$ als Zielbereich verallgemeinern: Gegeben sei die Menge $\mathrm{Abb}(\Omega, \mathbb{K})$ aller Abbildungen von einer Menge Ω in einen Körper $\mathbb{K}$. Wir definieren für alle $f, g \in \mathrm{Abb}(\Omega, \mathbb{K})$ und alle $c \in \mathbb{K}$ die punktweisen Operationen wie folgt:

- $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$, für alle $x \in \Omega$
- $(c \cdot f)(x) := c \cdot f(x)$ für alle $x \in \Omega$

Zeigen Sie, dass $\mathrm{Abb}(\Omega, \mathbb{K})$ bezüglich dieser Operationen ein Vektorraum ist.

Aufgabe 5 (1)
Benutzen Sie nun Aufgabe 3 und Aufgabe 4 um sich einige Beispiele für Vektorräume auszudenken. Wählen Sie einen Körper und legen die übrigen Parameter fest. Wie viele Vektorräume können Sie auf diese Weise konstruieren?

Aufgabe 6 (2)
Zeichen Sie den $\mathbb{K}$-Vektorraum $V := \mathbb{K}^3$ für folgende Körper $\mathbb{K}$ und geben Sie an, wie viele Elemente V enthält:

a) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

b) $\mathbb{K} = \{0, 1\}$, das heißt in $\mathbb{K}$ gilt die Gleichung $1 + 1 = 0$

c) $\mathbb{K} = \{0, 1, 2\}$, das heißt in $\mathbb{K}$ gilt die Gleichung $1 + 1 + 1 = 0$